Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava, šk.g. 2004/05

Funkcionalne jednačine

predavač: Marko Radovanović

1. (**Košijeva jednačina**) Rešiti funkcionalnu jednačinu $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ako je $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$.

2. Za funkciju $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ važi $f(1) = 2$ i $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$. Naći sve takve funkcije.

3. (Okružno 2004, 3 raz) Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ koje za sve $x, y \in \mathbf{N}$ zadovoljavaju

$$f\Big(\frac{x+y}{3}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \text{kad je } \frac{x+y}{3} \in \mathbf{N}.$$

4. (Republičko 2004, 3 raz) Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je takva da je

$$x + f(x) = f(f(x))$$

za svako $x \in \mathbf{R}$. Naći sva rešenja jednačine $f(f(x)) = 0$.

5. (Republičko 2004, 4 raz) Naći sve 1-1 funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju uslove:

$$a)\ f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad b)\ f(1) = 2,\ f(2) = 4.$$

6. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Naći sve monotone funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tako da

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n.$$

7. (Interno 2004.) Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takve da je $f(f(m) + f(n)) = m + n$, za svaka dva prirodna broja m i n.

8. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

9. Naći sve funkcije $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je za proizvoljne realne brojeve x i y:

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y).$$

10. (BMO 2000, 1 zad) Rešiti funkcionalnu jednačinu

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2,\ x, y \in \mathbf{R}.$$

11. (BMO 2003, 3 zad) Naći sve funkcije $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:
(a) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$, za svako x, $y \in \mathbf{Q}$;
(b) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$, za svako $x \in \mathbf{Q}$;
(c) $f(1) + 1 > 0$.

12. Data je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ako za svaka va realna broja x i y važi $f(xy+x+y) = f(xy)+f(x)+f(y)$, dokazati da onda važi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ za svaka dva realna broja x i y.

13. (IMO 1990, 4 zad) Naći funkciju $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ takvu da je

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y},\ \text{za sve } x, y \in \mathbf{Q}^+.$$

14. (IMO 1992, 2 zad) Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takve da je $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

15. (IMO 1994, 5 zad) Neka je S skup svi realnih brojeva strogo većih od -1. Naći sve funkcije $f : S \to S$ koje zadovoljavaju sledeća dva uslova:
(a)$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ za sve x, $y \in S$;
(b)$\frac{f(x)}{x}$ strogo raste na svakom od intervala $-1 < x < 0$ i $0 < x$.

16. (IMO 2002, 5 zad) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

17. Da li postoji funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da za svaki prirodan broj n važi:

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n).$$

18. Naći sve funkcije $f : N_0 \to N_0$ koje zadovoljavaju uslove:

(a)$f(2) = 2$;

(b)$f(mn) = f(m)f(n)$ za svaka dva uzajamno prosta prirodna broja m i n;

(c) $f(m) < f(n)$ uvek kada je $m < n$.

19. Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to [1, \infty)$ koje zadovoljavaju uslove pod (a) i (b) prethodnog zadatka, a uslov (b) je zadovoljen za svaka dva prirodna broja m i n.

20. Naći sve funkcije $f : N_0 \to N_0$ za koje važi jednakost

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k,$$

za svako $n \in N_0$ i fiksiran prirodan broj k.

21. Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju uslove:
(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za svaka dva realna x i y;
(b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ za $x \neq 0$.

22. Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ za koje je za svaka dva realna broja $x \neq y$ zadovoljen uslov

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

23. Naći sve funkcije $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ koje zadovoljavaju uslove:
(a) $f(x + 1) = f(x) + 1$ za sve $x \in \mathbf{Q}^+$;
(b) $f(x^3) = f(x)^3$, za sve $x \in \mathbf{Q}^+$.

24. Naći sve funkcije $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ za koje je

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1.$$

Uraditi isti zadatak u slučaju da je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

25. Da li postoji funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je $f(f(x)) = x^2 - 2$ za svaki realan broj x?

26. (Kineska Olimpijada) Naći sve funkcije $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ koje zadovoljavaju uslove:
(a) $f(x) \leq 2(1 + x)$ za svako $x \in [1, \infty)$;
(b) $xf(x + 1) = f(x)^2 - 1$ za svako $x \in [1, \infty)$.

27. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy + 1).$$

28. Dokazati da se svaka funkcija se može predstaviti kao suma parne i neparne funkcije.

29. Naći sve neprekidne funkcije $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x + y) + g(x - y) = 2h(x) + 2h(y).$$

30. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy + 1).$$

31. (Beloruska Olimpijada) Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(f(x)) = f(x) + 2x.$$

32. (IMO 2003, predlog) Neka je $\mathbf{R}^+$ skup pozitivnih relnih brojeva. Naći sve funkcije $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:
(a) $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$
(b) $f(x) < f(y)$ za sve $1 \leq x < y$.

33. Naći sve neprekidne funkcije $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x)f(y) = f(xy) + f(x/y).$$

34. (IMO 1999, 6 zad.) Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$